TECHNION – ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
32000 HAIFA, ISRAEL

הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למתמטיקה
חיפה 32000

בס"ד, יום ראשון, א' אב, תשפ"ג

19.7.23

מבחן בחדו"א 1מ – 104018 – אביב תשפ"ג – 2023 – מועד א'

- משך הבחינה שלוש שעות.
- יש לכתוב בעט שחור או כחול בלבד.
- אסור להשתמש בחומר עזר
- במבחן שלושה חלקים. חלק ראשון שמכיל שאלות פתוחות, חלק שני שאלות נכון/לא נכון וחלק שלישי של שאלות רב בררתיות ("אמריקאיות").
- בחלק של השאלות הפתוחות יש לנמק היטב כל צעד
- את כל התשובות יש לכתוב בגוף השאלון.

שאלה 1 (20 נק')

(שימו לב! שאלה זו, בנוסף להיותה חלק אינטגרלי מהבחינה, משמשת כתחליף לבוחן למי שזכאי לכך)

א. (10 נק') הראו כי $1-x \le sinx+cosx \le 1+x$ עבור $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

פתרון. ברור ש-

$$sinx+cosx \le 1+x$$

שהרי $sinx \le x$ ו- $cosx \le 1$

נראה כעת כי

$$sinx+cosx \ge 1-x$$

נכתוב

$$f(x)=sinx+cosx-1-x$$

נקבל כי

$$f(0)=0$$

וברור שבתחום הנתון

$$f'(x)=cosx-sinx-1 \le 0$$

ולכן

$$f(x) \ge 0$$

בתחום הנתון. כלומר

$$sinx+cosx \ge 1-x$$

בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

ב. (10 נק') הראו כי $\frac{2}{3} \le \int_0^1 \left(sin(x^2)+cos(x^2)\right)dx \le \frac{4}{3}$

ע"פ א.

$$1-x^2 \le sin(x^2)+cos(x^2) \le 1+x^2$$

כלומר

$$\frac{2}{3}=\int_0^1 (1-x^2)\,dx \le \int_0^1 \left(sin(x^2)+cos(x^2)\right)dx \le \int_0^1 (1+x^2)\,dx=\frac{4}{3}$$

שאלה 2 (15 נקודת)

א. (5 נק') נסחו את משפט לגרנז'

תהא f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b). אזי קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש-

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ב. (10 נק') תהא f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b) המקיימת $f(a)=a$ ו- $f(b)=b$ ונסמן $d=\frac{a+b}{2}$. הראו שקיימות שתי נקודות $c_1\in(a,d)$ ו-$c_2\in(d,b)$ כך ש-

$$f'(c_1)+f'(c_2)=2$$

פתרון.

f רציפה בקטע הסגור $[a,d]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,d) ולכן קיימת נקודה $a<c_1<d$ כך ש- $f'(c_1)=\frac{f(d)-f(a)}{d-a}$

f רציפה בקטע הסגור $[d,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (d,b) ולכן קיימת נקודה $d<c_1<b$ כך ש- $f'(c_2)=\frac{f(b)-f(d)}{b-d}$

נקבל כי

$$f'(c_1)+f'(c_2)=\frac{f(d)-f(a)}{d-a}+\frac{f(b)-f(d)}{b-d}$$

כיוון ש- $d=\frac{a+b}{2}$

נקבל כי $d-a=b-d=\frac{b-a}{2}$

ומכאן כי

$$f'(c_1)+f'(c_2)=\frac{f(d)-f(a)}{d-a}+\frac{f(b)-f(d)}{b-d}=\frac{f(b)-f(a)}{\frac{b-a}{2}}$$

כיוון ש- $f(a)=a$ ו-$f(b)=b$

יוצא ש- $f'(c_1)+f'(c_2)=2$

<u>שאלה 3 (20 נק')</u>

(15 נק') א. חשבו את $\sqrt{19}$ ברמת דיוק של $\frac{1}{500}$

פתרון. נפתח את הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ לפולינום טיילור בסביבה של הנקודה $x=16$ מסדר 2

$$f(x)=f(16)+f'(16)(x-16)+\frac{f''(16)}{2!}(x-16)^2$$

כאשר

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-3/2}$$

$$f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-5/2}$$

והשארית היא: (c בין 16 ל-19)

$$|R_0|=\left|\frac{\frac{1}{2}c^{-1/2}(x-16)}{1!}\right|\le\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 3\right|=\frac{3}{8}>\frac{1}{500}$$

$$|R_1| = \left|\frac{-\frac{1}{4}c^{-3/2}(x-16)^2}{2!}\right| \le \left|\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{64}\cdot 9\right| = \frac{9}{256} > \frac{1}{500}$$

$$|R_2| = \left|\frac{\frac{3}{8}c^{-5/2}(x-16)^3}{3!}\right| \le \left|\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{1024}\cdot\frac{27}{6}\right| = \frac{81}{48\cdot 1024} < \frac{1}{500}$$

ולכן

$$\sqrt{19} \approx\ 4 + \frac{1}{2}16^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}16^{-3/2} = 4 + \frac{3}{8}\ - \frac{9}{512}$$

ב. (5 נק') מצאו את $\sqrt{76}$ ברמת דיוק של $\frac{1}{100}$ ע"י שימוש בסעיף א' בלבד.

פתרון. ע"פ סעיף א

$$\sqrt{19} =\ 4 + \frac{1}{2}16^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}16^{-\frac{3}{2}} = 4 + \frac{3}{8}\ - \frac{9}{512} + R_2$$

כאשר $|R_2| < \frac{1}{500}$

ולכן

$$\sqrt{76} = 2\sqrt{19} = \mathbf{2}\left(4 + \frac{3}{8}\ - \frac{9}{512} + R_2\right) = 8 + \frac{6}{8}\ - \frac{18}{512} + 2R_2$$

כאשר $|2R_2| < \frac{1}{250} < \frac{1}{100}$

כלומר $\sqrt{76} \approx 8 + \frac{6}{8}\ - \frac{18}{512}$

חלק שני רב ברירתי – "אמריקאי" (35 נקודות)

שאלה 1 (7 נק')

מספר השורשים של הפונקציה $ln(1+sinx)+1$ בקטע $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$

א. 4 ב. 3 **ג.** 2 ד. 1 ה. 0

שאלה 2 (7 נק')

נתונים שני הטורים הבאים $I=\sum_{n=2}^{\infty} sin^2\left(\frac{1}{ln(n)}\right)\left(\frac{\pi}{2}-arctan(n)\right)$ ו-

$II=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{tan\left(1+\frac{1}{n}sin\left(\frac{2}{n}\right)\right)}{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ אזי

א. I מתכנס II מתבדר

ב. II מתכנס I מתבדר

ג. שניהם מתכנסים

ד. שניהם מתבדרים

שאלה 3 (7 נק')

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n n!\,(x-1)^n$ מתכנס עבור ה-x -ים הבאים

א. $-1\le x\le 3$ ב. $-1\le x<3$ **ג.** $x=1$ ד. $-1<x\le 3$ ה. $-\infty<x<\infty$

שאלה 4 (7 נק')

נתונה פונקציה רציפה $f:[0,1]\to[0,1]$ אזי

א. קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f(c)-1=c$

ב. קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f(c)+1=c$

ג. קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f(c)\ln(c+3)=c$

ד. קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $e^c f(c)=c$

ה. קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f^2(c)\cos(c)=c$

שאלה 5 (7 נק')

ערך האינטגרל $\int_1^{e^{1/2}}\frac{dx}{x\left(1-ln^2(x)\right)}$

א. $ln5$ ב. $\frac{ln2}{3}$ **ג.** $\frac{ln3}{2}$ ד. $ln4$ ה. $ln3$

סמנו נכון/לא נכון בסעיפים הבאים (10 נק' - 2 נק' לכל סעיף)

1. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+sin\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = e$

א. נכון **ב. לא נכון**

2. לכל $x \geq 0$ מתקיים $sin(x) \leq x^2$

א. נכון **ב. לא נכון**

3. אם $\lim_{n\to\infty} a_{3n}$ קיים ו- $\lim_{n\to\infty}(a_{3n+1} - a_{3n}) = 0$ אזי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

א. נכון **ב. לא נכון**

4. נקודת פיתול יכולה להיות גם נקודת מינימום

א. נכון **ב. לא נכון**

5. אם f רציפה $[-1,1]$ וגזירה פעמיים בקטע $(-1,1)$ כך ש- $f'(0) = 0$ ו- $f''(0) = 0$ אזי $x = 0$ היא נקודת פיתול.

א. נכון **ב. לא נכון**

דף ריק במידת הצורך

בהצלחה!